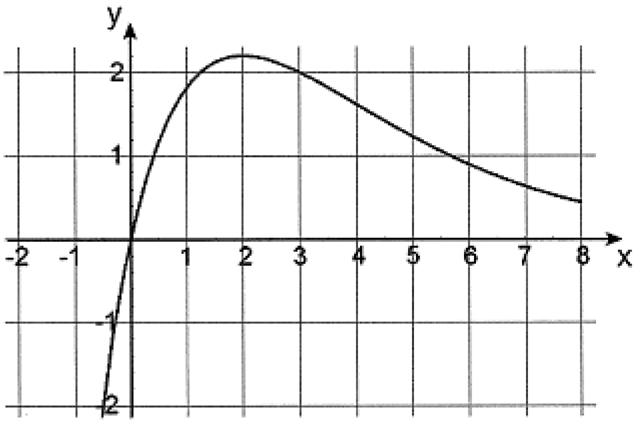
Analysis

1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_f einer Funktion f.



Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

(1) Es gilt: $f''(1) < 0$

(2) Die Steigung von f an der Stelle x = 0 ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall [0;3].

(3) Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle x = 0 einen Tiefpunkt.

(6 Punkte)

1.2 Berechnen Sie die erste Ableitung g' für die jeweilige Funktion g.

(1) $g(x) = (2x+1)^2$

(2) $g(x) = (x+1) \cdot e^x$ (3 Punkte)

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$

1.3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$. (3 Punkte)

1.3.2 Berechnen Sie: $\int_0^2 h(x)dx$. (3 Punkte)

Stochastik

2 In der norwegischen Hauptstadt Oslo ist jeder zehnte Pkw ein Elektroauto.

2.1 Auf einem kommunalen Parkplatz in Oslo beträgt die Parkgebühr für Pkw fünf norwegische Kronen. Elektroautos parken kostenlos. Pro Tag wird der Parkplatz von 300 Pkw genutzt.
Bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, die man erwarten kann.
(2 Punkte)

2.2 Im Folgenden werden in Oslo zufällig vorbeifahrende Pkw betrachtet.

2.2.1 Drei Pkw fahren vorbei.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Unter diesen Pkw ist genau ein Elektroauto.
B: Unter diesen Pkw ist mindestens ein Elektroauto. (4 Punkte)

2.2.2 Definieren Sie die Zufallsvariable X und formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden kann:

$$P(X \leq 2) = 0{,}9^{100} + 100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{98}$$ (2 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ & 3x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array}$$

(3 Punkte)

3.2 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal sind.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

(4 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ & 3x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array}$$

(3 Punkte)

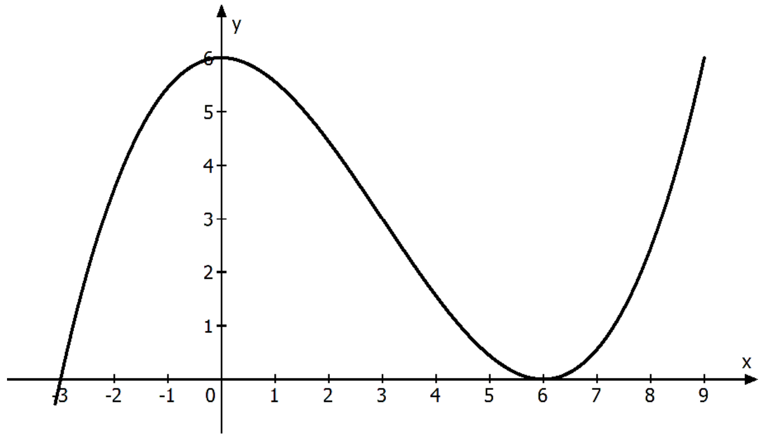
3.2 Im Folgenden sind alle vorliegenden (n x n) – Matrizen invertierbar.
E ist die Einheitsmatrix.

Lösen Sie die Matrizengleichung
$(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$
nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich. (4 Punkte)

Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{2}x^2+6$ mit $x\in\mathbb{R}$.

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K von f.



1.1.1 Bestimmen Sie die reellen Werte von a, b und c, sodass gilt:
$f(x)=a\cdot(x-b)\cdot(x-c)^2$; $x\in\mathbb{R}$. (3 Punkte)

1.1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von K und zeigen Sie, dass dieser auf der ersten Winkelhalbierenden liegt.
(4 Punkte)

1.1.3 Das Schaubild K schließt mit der x-Achse eine Fläche A ein, die von der y-Achse in zwei Flächen unterteilt wird. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A.
(4 Punkte)

1.1.4 Geben Sie jeweils die Gleichung einer Geraden durch den Punkt (0|6) an, die mit K
(1) genau einen Punkt
(2) genau drei Punkte
gemeinsam hat.

Die Gerade mit der Gleichung $y=m\cdot x+6$ soll mit K genau zwei gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie die beiden Werte für die Steigung m.
(6 Punkte)

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch

$$g(x)=\int_1^{x^2+1}\sin(2t)dt \text{ mit } x\in\mathbb{R}$$

Gabi behauptet, dass die erste Ableitung der Funktion g wie folgt lautet:
$g'(x)=\sin(2x^2+2)-\sin(2)$. Beurteilen Sie diese Behauptung. (3 Punkte)

Anwendungsorientierte Analysis

2 Um Zugvögel beim Fliegen zu beobachten setzen Forscher spezielle, sehr leichte Drohnen ein. Die Drohne startet vom Boden aus und fliegt nach starker Beschleunigung hinter den Vögeln her. Die Geschwindigkeit der Drohne kann modellhaft durch die Funktion v mit

$$v(t) = 25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322t} \; ; \; t \geq 0$$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden (s) seit dem Start der Drohne (t =0).

v(t) gibt die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde ($\frac{m}{s}$) zum Zeitpunkt t an.

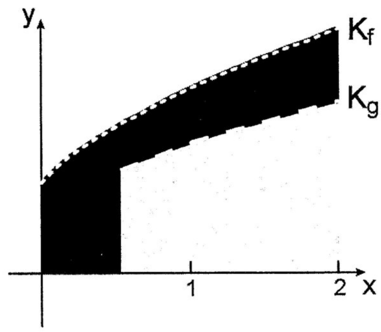
2.1 Zeichnen Sie das Schaubild von v für $0 \leq t \leq 100$.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde, an die sich die Geschwindigkeit der Drohne nach diesem Modell annähert.
(4 Punkte)

2.2 Berechnen Sie $\int_0^{50} v(t)dt$.
Interpretieren Sie das Integral im Sachzusammenhang. (3 Punkte)

2.3 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit entspricht der Beschleunigung dieser Drohne.
Begründen Sie, dass die Drohne beim Start die größte Beschleunigung hat.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Beschleunigung geringer als 0,5 $\frac{m}{s^2}$ ist.
(3 Punkte)

Anwendungsorientierte Analysis

3 Für eine Gartenschau sollen verschiedene Pflanzenkübel mit einer Höhe von jeweils 2 Meter aus Kunststoff gegossen werden. Die Abbildung unten zeigt beispielhaft den halben Querschnitt eines um 90° gekippten Pflanzenkübels mit seinem Pflanzeinsatz. Der Kübel wird durch Rotation der schwarzen Fläche um die x-Achse beschrieben. Die Mantelfläche des Kübels wird hierbei mit Hilfe des Schaubilds K_f der Funktion f erzeugt (in der Abbildung gepunktet). Analog wird die Mantelfläche des Pflanzeinsatzes mit Hilfe des Schaubilds K_g der Funktion g erzeugt (in der Abbildung gestrichelt). Alle Angaben sind in Meter (m).



3.1 Zur Modellierung eines bestimmten Pflanzenkübels werden die Funktionen f und g mit $f(x)=\sqrt{x+1}$; $0 \le x \le 2$ und $g(x)=\sqrt{0,5x+0,5}$; $0,5 \le x \le 2$ verwendet.
Dieser Pflanzenkübel wird aus Kunststoff der Dichte 0,9 Tonnen pro Kubikmeter gefertigt.
Berechnen Sie die Masse dieses Pflanzkübels in Tonnen.

(5 Punkte)

3.2 Für einen anderen Pflanzenkübel wird die Funktion f mit $f(x)=ax^3+bx^2+1$; $0 \le x \le 2$ verwendet.
Prüfen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass in einer Höhe von 2m der Radius des Pflanzenkübels 1,5m ist und der kleinste Radius in einer Höhe von 1m vorliegt.

(5 Punkte)

Anwendungsorientierte Analysis

4 Ein Wetterballon startet auf Meereshöhe und sendet mit ansteigender Höhe Daten des entsprechenden Luftdrucks. Bei seinem Flug wird der vom Ballon gemessene Luftdruck p in hPa (Hektopascal) in Abhängigkeit von der Höhe h (in km) näherungsweise durch die Funktion p mit $p(h) = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot h}$; $0 \le h \le 11$, modelliert.

4.1 Bestimmen Sie den Luftdruck auf Meereshöhe.
Ermitteln Sie die Höhe bei der ein Luftdruck von 787 hPa gemessen wird.

(3 Punkte)

4.2 Bestimmen Sie die prozentuale Abnahme des Luftdrucks, wenn die Höhe um einen Kilometer zunimmt.

(2 Punkte)

4.3 Berechnen Sie den mittleren Wert des Luftdrucks, dem der Ballon bei seinem Aufstieg von Meereshöhe bis auf 11 km Höhe ausgesetzt ist.

(3 Punkte)

4.4 Interpretieren Sie die folgende Näherungsformel im Sachzusammenhang:

$$p(h + 5{,}5) \approx \frac{p(h)}{2} \; ; \; 0 \le h \le 5{,}5$$

(2 Punkte)

Stochastik

1 Bei einem 10 km Lauf werden die Läufer auf halber Strecke an einem Stand versorgt. Die Organisatoren bieten jedem Läufer jeweils genau einen Becher Wasser und ein Stück Obst als Versorgung an.
Aufgrund der Erfahrung aus früheren Wettbewerben nimmt man folgende Wahrscheinlichkeiten an:

- 80% der Läufer nehmen einen Becher Wasser
- 30% der Läufer nehmen ein Stück Obst
- 5% der Läufer nehmen nur ein Stück Obst und kein Wasser

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: Von fünf Läufern nehmen genau vier Läufer einen Becher Wasser
B: Von sechs Läufern nehmen mindestens zwei Läufer ein Stück Obst
C: Ein Läufer nimmt nur ein Becher Wasser und kein Obst (7 Punkte)

1.2 Beurteilen Sie folgende Aussage:

„Wenn ein Läufer einen Becher Wasser zu sich nimmt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er dann auch ein Stück Obst zu sich nimmt, mehr als 30%.“
(3 Punkte)

1.3 Insgesamt nehmen an dem Lauf 2500 Läufer teil.

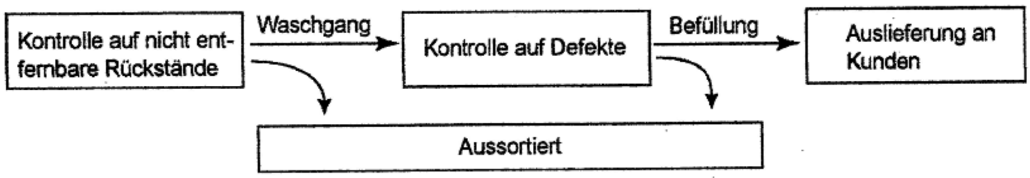
1.3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2050 Läufer einen Becher Wasser nehmen.
(2 Punkte)

1.3.2 Nach dem Lauf sollen die Wahrscheinlichkeiten überprüft werden, die aus der Erfahrung der früheren Wettbewerbe resultierten.

Tatsächlich haben genau 1950 Läufer einen Becher Wasser genommen. Fassen Sie dieses Ergebnis als Stichprobe auf.
Prüfen Sie, ob die ursprünglich angenommene Wahrscheinlichkeit von 80% in dem zugehörigen Vertrauensintervall mit Vertrauenswahrscheinlichkeit 99% liegt, das sich aus der Stichprobe ergibt.
(3 Punkte)

Stochastik

2 Der Mineralwasserproduzent „Sauberwasser“ muss zurückgegebene PET-Pfandflaschen von einer erneuten Befüllung auf nicht entfernbare Rückstände sowie auf Defekte (wie Risse) untersuchen und gegebenenfalls direkt nach der jeweiligen Kontrolle aussortieren. Der Prozessablauf, den jede einzelne Flasche durchläuft, ist im Folgenden dargestellt:



2.1 Beim Produzenten Sauberwasser weiß man:

- 99% aller Flaschen durchlaufen den Waschgang
- 96% aller Flaschen werden befüllt, haben also weder nicht entfernbare Rückstände noch einen Defekt

2.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
E1: Von 5 Flaschen werden 5 befüllt.
E2: Von 15 Flaschen wird genau eine Flasche nicht befüllt.
E3: Eine Flasche, die gewaschen wurde, wird auch befüllt.
E4: Eine Flasche, die nicht befüllt wird, wurde nicht gewaschen.

(7 Punkte)

2.1.2 Bestimmen Sie, wie viele Flaschen mindestens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens eine Flasche vorzufinden, die nicht befüllt wird.

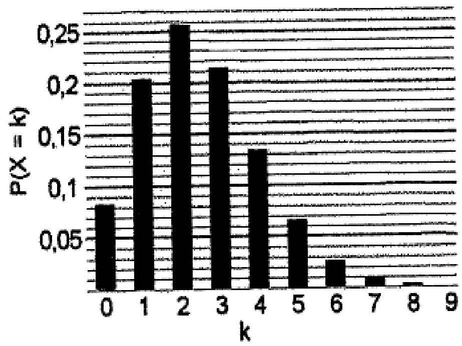
(3 Punkte)

2.2 Trotz aller Qualitätskontrollen können nicht alle fehlerhaften Flaschen erkannt werden. Erfahrungsgemäß sind 0,5% aller ausgelieferten Flaschen fehlerhaft.
Der Produzent Sauberwasser kontrolliert vor der Auslieferung an die Kunden bei einer Stichprobe 500 Flaschen auf Fehler.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl X der fehlerhaften Flaschen dieser Stichprobe.

Im Diagramm ist die Wahrscheinlichkeitsverteilnug von X dargetellt.

Bestimmen Sie damit näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Flaschen im σ- Intervall des Erwartungswerts liegt.

Nennen Sie einen Grund für die Abweichung von der Wahrscheinlichkeit aus der entsprechenden Sigma-Regel.



(5 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

1 In einer Simulation wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Heimspiele einer Fußballmannschaft regelmäßig von jeweils genau 50.000 Zuschauern besucht werden. Die Zuschauer reisen ausschließlich mit dem Auto (A), mit dem Bus bzw. der Bahn (B) oder zu Fuß bzw. dem Fahrrad (F) an.
Mit einem Auto können mehrere Zuschauer befördert werden. Die Zuschauer bilden also hinsichtlich der Anreise drei verschiedene Typen.
In der Simulation gilt das folgende Wechselverhalten der Zuschauertypen von einem Spieltag zum nächsten:

- Von A wechseln 25% zu B.
- Von B wechseln 5% zu F und 20% zu A.
- Von F wechseln jeweils 10% zu A und zu B.

Die restlichen Zuschauer wechseln nicht.

1.1 Stellen Sie dieses Wechselverhalten in einem Übergangsdiagramm dar.
Ermitteln Sie die jeweilige Anzahl der Zuschauertypen am zweiten Heimspieltag, wenn man bei der Simulation annimmt, dass am ersten Heimspieltag alle Zuschauer zu Fuß bzw. dem Fahrrad kommen.

(5 Punkte)

1.2 Bestimmen Sie die prozentualen Anteile der verschiedenen Zuschauertypen, sodass sich diese Anteile an zwei aufeinander folgenden Heimspieltagen nicht verändern.

(4 Punkte)

1.3 Nun geht man in der Simulation davon aus, dass am zweiten Heimspieltag 27.000 Zuschauer vom Typ B und 3.000 Zuschauer vom Typ F kommen.
Pro Auto reisen zudem immer durchschnittlich 2,5 Zuschauer an.

1.3.1 Zeigen Sie, dass hierbei 8.000 Parkplätze am dritten Heimspieltag nicht ausreichen würden.

(3 Punkte)

1.3.2 In der Simulation wird nun das Wechselverhalten der Autofahrer nach dem zweiten Heimspieltag so angepasst, dass die 8000 Parkplätze am dritten Heimspieltag genau ausreichen. Das Wechselverhalten der anderen Zuschauertypen B und F ändert sich dabei nicht.
Ermitteln Sie den veränderten Prozentsatz von Zuschauern vom Typ A, die dann wieder mit dem Auto kommen.

(3 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1 Ein Flugzeug fliegt auf seiner Route über zwei verschiedene Länder hinweg. Ein Abschnitt der Flugroute kann modellhaft dargestellt werden durch g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix} \; ; \; 0 \le t \le 20$$

wobei t die Zeit in Minuten ist.
Zu Beginn (t = 0) befindet sich das Flugzeug am Punkt P(-20 | - 60| 11).
Die x_3 - Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.

Die Längeneinheit ist Kilometer (km). Die Luftraumgrenze der Länder wird durch die Ebene E mit E: $3x_1 + 2x_2 = 0$ modelliert.

1.1 Bestimmen Sie den Ort des Flugzeugs fünf Minuten nach Beginn.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde.
Begründen Sie, dass die Flughöhe in diesem Abschnitt ständig abnimmt.
(4 Punkte)

1.2 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:
„Zu Beginn beträgt der minimale Abstand des Flugzeugs zur Lauftraumgrenze der Länder weniger als 50 Kilometer.“
(4 Punkte)

1.3 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder durchstößt.
Bestimmen Sie die Höhe, in der sich das Flugzeug dann befindet.
(3 Punkte)

1.4 Ein anderes Flugzeug ist gleichzeitig auf einer anderen Route unterwegs.
Diese Route wird durch h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -56 \\ 8,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -0,25 \end{pmatrix} \; ; \; 0 \le t \le 20 \, ,$$

modelliert. Bestimmen Sie die kleinste Entfernung der beiden Flugzeuge zueinander innerhalb des zwanzigminütigen Flugabschnitts.
(4 Punkte)