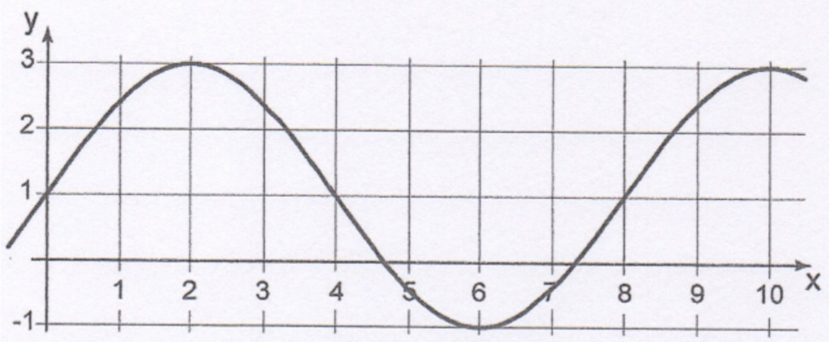
## Analysis

1.1 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion f.




1.1.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) $f'(1) > 0$

(2) $\int_1^3 f(x)dx \geq 6$

(3) Für jede Stammfunktion F von f gilt: $F(4) = F(0)$ .

(6 Punkte)

1.1.2 Ermitteln Sie einen Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion, die zu diesem Schaubild passt.

(3 Punkte)

1.2 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion g mit $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ .

(2 Punkte)

1.3 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} (\sqrt{2} \cdot x)^2 dx$ . (2 Punkte)

1.4 Im Folgenden ist e die Eulersche Zahl und h die Funktion mit $e^{h(x)} = x$ für x > 0.

Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{x}$ für x > 0. (2 Punkte)

## Stochastik

2 Laut Statistik fahren 70% aller Besucher eines Freizeitparks mit der extrem schnellen Super-Achterbahn. Von den Fahrern sind 10% über 50 Jahre alt.
Die Besucher, die nicht mit dieser Achterbahn fahren, sind zu 80% über 50 Jahre alt.

2.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und tragen Sie die genannten Wahrscheinlichkeiten ein.

(3 Punkte)

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher des Freizeitparks über 50 Jahre alt ist.

(2 Punkte)

2.2.1 Geben Sie im Sachzusammenhang eine Fragestellung an, die mithilfe des Terms $0{,}7^{12} + 12 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{11}$ beantwortet werden kann.

(2 Punkte)

## Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + y \phantom{{}-2z} &= \frac{5}{3} \\ y - 2z &= 1 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

(2 Punkte)

3.2 Gegeben ist die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ .

3.2.1 Begründen Sie, dass g parallel zur $x_1x_3-$ Ebene ist.

Geben Sie eine Gerade an, die parallel zur Geraden g ist und von dieser den Abstand 5 Längeneinheiten hat.

(3 Punkte)

3.2.2 Berechnen Sie den Abstand, den der Punkt P(0/0/0) zu g hat. (3 Punkte)

## Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{5}{3} \\ y - 2z &= 1 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

(2 Punkte)

3.2 Im Folgenden ist $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix und A eine Matrix mit $A \cdot A = E$ .

3.2.1 Berechnen Sie die Werte für a und b, falls $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ . (3 Punkte)

3.2.2 Lösen Sie die die folgende Matrizengleichung nach der 2 x 2-Matrix X auf:

$$(A^2 - 2X)A = 2XA$$

(3 Punkte)

## Analysis

1.1 Eine Polynomfunktion p ist gegeben durch $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$ ist.

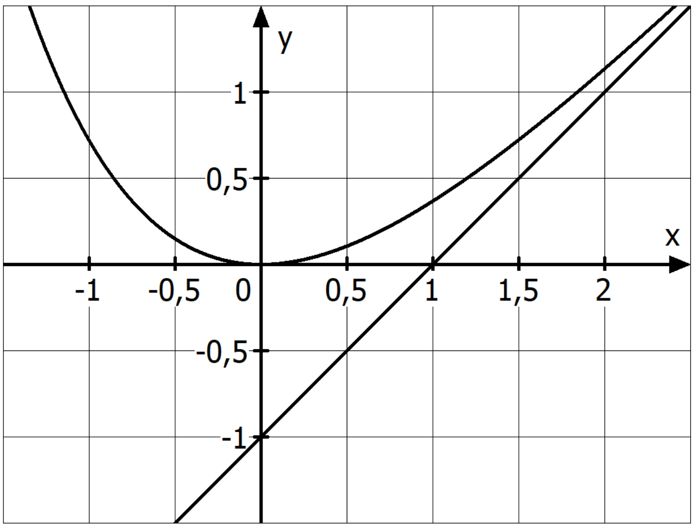
1.1.1 Bestimmen Sie die Werte von a und b, sodass die Punkte P(-1|1) und Q(1|0) auf dem Schaubild von p liegen.

(3 Punkte)

1.1.2 Nun gilt: b = -a. Untersuchen Sie, ob es eine negative Nullstelle von p gibt.

(2 Punkte)

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - 1 + e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild K von f, sowie dessen Asymptote g mit der Gleichung $y = x - 1$.




1.2.1 Geben Sie den Punkt auf g an, der den kleinsten Abstand zum Tiefpunkt T(0|f(0)) von K hat, und ermitteln Sie dessen Abstand.

(2 Punkte)

1.2.2 Das Schaubild H einer Funktion h entsteht durch Verschiebung von K. Der Tiefpunkt von H liegt bei (1|-1). Berechnen Sie einen Funktionsterm von h.

(2 Punkte)

1.2.3 Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:
(1) K besitzt keinen Wendepunkt.
(2) Im Intervall [1,841 ; 1,842] liegt ein $x_0$, sodass $f(x_0) = 1$ gilt.
(3) Es gibt keine Normale an K, die g senkrecht schneidet.

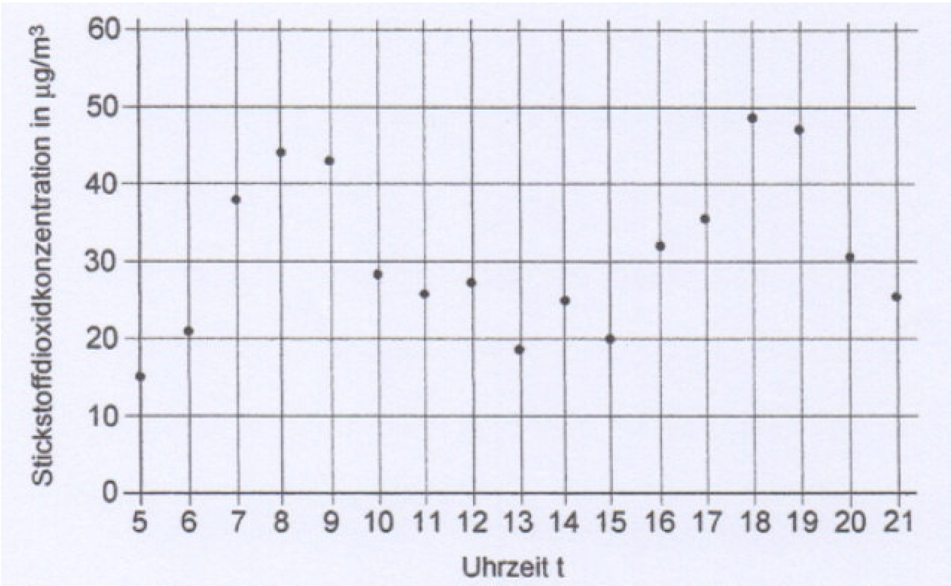
(7 Punkte)

1.2.4 Das Schaubild K, die beiden Geraden mit der Gleichung x = -c und x = c mit c > 0, und die Gerade g umschließen eine Fläche.
Bestimmen Sie c, sodass der Inhalt dieser Fläche den Wert 2 hat.

(4 Punkte)

## Anwendungsorientierte Analysis

2 Ein großer Anteil des Stockstoffoxids ($NO_2$) in der Luft wird durch Verbrennungsmotoren im Straßenverkehr erzeugt.
An einer Messstation in einer süddeutschen Stadt wird die $NO_2$ - Konzentration in der Luft täglich aufgezeichnet. Die Abbildung zeigt die, an einem Werktag im Herbst zwischen 5 Uhr morgens und 21 Uhr abends gemessenen, $NO_2$ - Datenwerte in Mikrogramm pro Kubikmeter Luft $\left(\frac{\mu g}{m^3}\right)$.




2.1 Beschreiben Sie die Entwicklung der $NO_2$ -Konzentration im Tagesverlauf und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

(2 Punkte)

2.2 Die Funktion f mit $f(t) = 15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) + 30$ ; $5 \leq t \leq 21$, modelliert den Wert der $NO_2$ -Konzentration f(t) in $\frac{\mu g}{m^3}$ zum Zeitpunkt dieses Tages.

2.2.1 Beurteilen Sie folgende Aussage: „Das Maximum von f weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der $NO_2$ -Konzentration um mehr als 10% ab.“

(2 Punkte)

2.2.2 Bestimmen Sie unter Verwendung des Modells f die beiden Zeitpunkte, an denen die Zunahme der $NO_2$ -Konzentration am größten ist.

(3 Punkte)

2.2.3 Zum Zeitpunkt der Messung galt für die $NO_2$ -Konzentration in der Luft der Grenzwert von 40 $\frac{\mu g}{m^3}$.
Bestimmen Sie mithilfe von f die Uhrzeit auf die Minute genau, zu der dieser Grenzwert erstmals erreicht wurde.

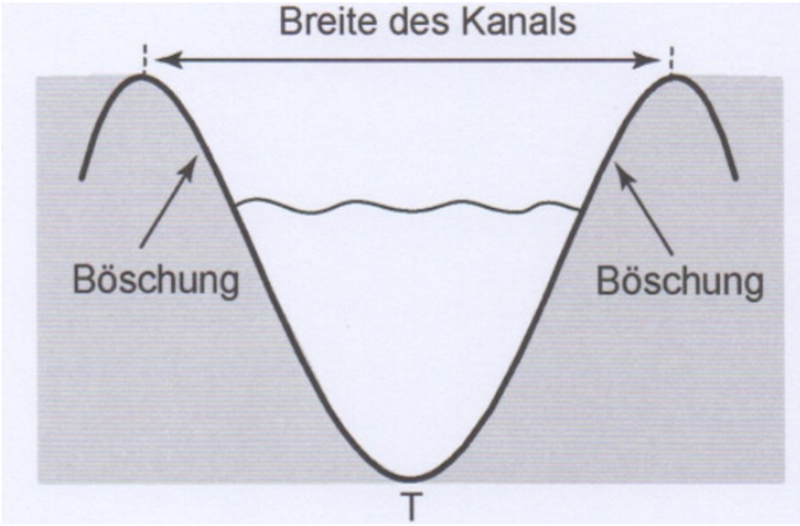
(3 Punkte)

## Anwendungsorientierte Analysis

3 Ein Ingenieurbüro plant den Bau eines 15 Meter (m) langen, geraden Kanals, der einen gleichbleibenden Querschnitt aufweist. Das Koordinatensystem wird im Modell so gelegt, dass T(0|0) den tiefsten Punkt des Querschnitts darstellt (siehe Abbildung). Die Randkurve des Querschnitts wird beschrieben durch die Funktion f mit

$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2$ ,

wobei x im Bereich der Breite des Kanals liegt und ebenso wie f(x) in Meter gemessen wird. Die Abbildung stellt eine nicht maßstabsgetreue Skizze des Schaubilds von f dar.




3.1 Berechnen Sie den höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals.
(3 Punkte)

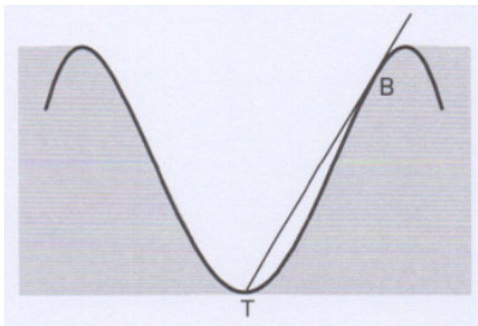
3.2 Das Wasser steht im Kanal 2 m hoch.

3.2.1 Zeigen Sie, dass der Wasserspiegel eine Breite von genau 4 m einnimmt.
(1 Punkt)

3.2.2 Berechnen Sie den Wert von $15 \cdot \int_{-2}^{2} (2 - f(x))dx$ .

Deuten Sie diesen Term und den berechneten Wert im Sachzusammenhang.
(3 Punkte)

3.3
Ein Laser in der Position T wird so eingestellt, dass er einen Laserstrahl erzeugt, der in der Ebene des Kanalquerschnitts verläuft und dabei die rechte Böschung an einem Punkt B(u|f(u)) mit u > 0 berührt.
Bestimmen Sie die Steigung a der Geraden mit der Gleichung $y = a \cdot x$ , die diesen Lichtstrahl modelliert.




(3 Punkte)

## Anwendungsorientierte Analysis

4 Ein Unternehmen bietet seinen Kunden für eine kurze Testphase ein neues Produkt an. Für den nächsten Produktionszeitraum sind maximal 9 Mengeneinheiten (ME) des Produkts geplant.
Der Verkaufspreis je Mengeneinheit wird mi 10 Geldeinheiten (GE) kalkuliert.
Der erzielte Erlös ist das Produkt aus dem Verkaufspreis und der Menge.

Die Gesamtkosten können durch die Funktion K mit der Funktionsgleichung
$K(x) = 0{,}2x^3 - x^2 + 4x + 8$
beschrieben werden, mit x in ME, K in GE.

Der Gewinn wird berechnet als Differenz aus dem Erlös und den Gesamtkosten.

4.1 Zeichnen Sie das Schaubild der Erlös- und Gesamtkostenfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem. Markieren Sie darin die Gewinnzone, d.h. die Produktionsmengen, für die kein Verlust gemacht wird.

(4 Punkte)

4.2 Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

(4 Punkte)

4.3 Claus stellt fest, dass an der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $K''(x_1) = 0 \quad \wedge \quad K'''(x_1) > 0$ ,

(2) $K'(x_1) = \frac{7}{3}$ .

Interpretieren Sie diese Bedingungen im Sachzusammenhang.

(2 Punkte)

## Stochastik

1 In Baden-Württemberg tragen 3,5% aller Zecken FSME-Viren in sich.
Diese Viren werden durch Bisse der Zecken auf den Menschen übertragen.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

$E_1$ : Von 20 zufällig ausgewählten Zecken trägt keine einzige FSME-Viren in sich.
$E_2$ : Von 50 zufällig ausgewählten Zecken trägt höchstens eine FSME-Viren in sich.
$E_3$ : Von 100 zufällig ausgewählten Zecken tragen mindestens vier FSME-Viren in sich.

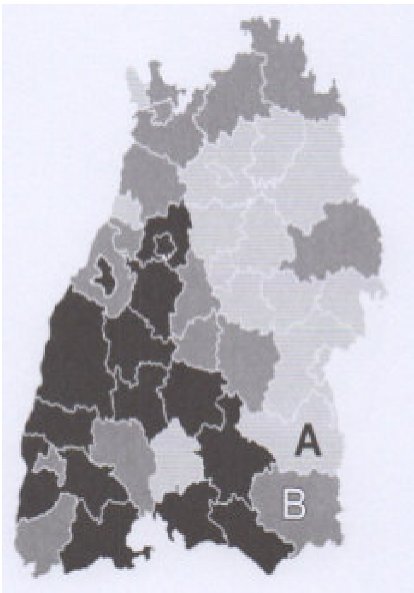
(6 Punkte)

1.2 Prüfen Sie, ob folgende Aussage wahr ist: Das Risiko einer Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen übersteigt in Baden-Württemberg erst dann 60%, wenn man dort von mindestens 25 Zecken gebissen wird.

(3 Punkte)

1.3

Die angegebene Wahrscheinlichkeit von 3,5% mit der die Zecke FSME-Viren in sich trägt, stellt einen Durchschnittswert für ganz Baden-Württemberg dar.
In allen Regionen wurden Stichproben genommen und die dortigen relativen Häufigkeiten berechnet. Je dunkler die Region in der Karte dargestellt ist, desto höher sind die relativen Häufigkeiten dafür, dass die Zecken FSME-Viren in sich tragen.
Für die Regionen A und B wurde jeweils ein 95%-Vertrauensintervall für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten, mit der eine Zecke dort FSME-Viren in sich trägt, bestimmt.
Für die Stichprobe in der Region A ist bekannt, dass 2000 Zecken getestet wurden.




1.3.1 Bei der Stichprobe in der Region A stellte man fest, dass 58 Zecken FSME-Viren in sich tragen. Geben Sie das näherungsweise bestimmte 95%-Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit an.
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

(3 Punkte)

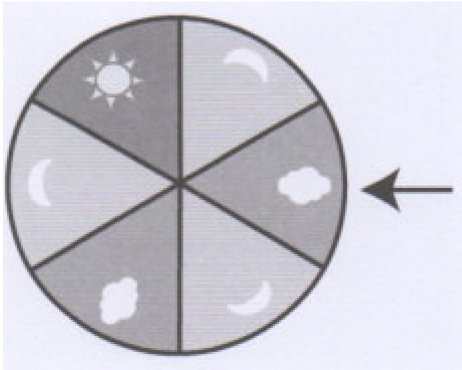
1.3.2 Bei der Prüfung der Stichproben wird festgestellt, dass die Längen der Vertrauensintervalle für die beiden Regionen A und B übereinstimmen, in Region B jedoch eine größere relative Häufigkeit als in Region A vorliegt (siehe Karte).
Erläutern Sie, was dies für den Umfang der Stichprobe in Region B bedeutet.

(3 Punkte)

## Stochastik

2

Das abgebildete Glücksrad besteht aus sechs gleich großen Sektoren. Wird das Glücksrad gedreht, so zeigt der Pfeil beim Stillstand auf genau einen Sektor.
Bei einem Fest wird folgendes Spiel angeboten: Zeigt der Pfeil auf Sonne oder Mond dreht man ein weiteres Mal. Das Spiel endet, wenn der Pfeil auf Wolke zeigt oder der Spieler das Rad schon dreimal gedreht hat.
Jeder Spieler darf das Spiel nur einmal spielen.



2.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

A: Der Spieler dreht dreimal das Glücksrad.
B: Der Spieler dreht das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond.

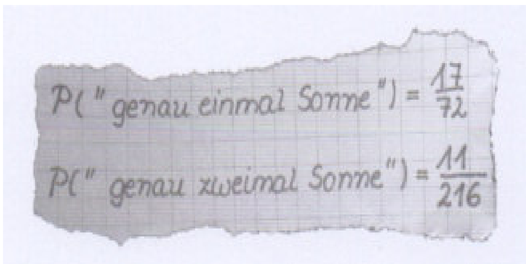
(4 Punkte)

2.2 Ein Spiel endet mit Wolke.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler dann keinmal Sonne gedreht hat.

(4 Punkte)

2.3

Der Besitzer des Glücksrads nimmt vor jedem Spiel einen Euro Einsatz vom Spieler. Immer dann, wenn der Spieler Sonne dreht, bekommt er einen Euro ausgezahlt. Ansonsten geht er leer aus.
Die Frau des Besitzers hat einige Wahrscheinlichkeiten richtig berechnet und auf einen Zettel geschrieben.




2.3.1 Berechnen Sie den Gewinn pro Spiel, den der Besitzer langfristig im Mittel erwarten kann.

(4 Punkte)

2.3.2 Der Besitzer des Glücksrads fragt sich, wie viele Spieler genau einen Euro ausgezahlt bekommen, wenn genau 140 Spieler das Spiel spielen.
Die Frau des Besitzers meint, es wären mehr als 30, aber weniger als 40.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau des Besitzers recht hat.

(3 Punkte)

## Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

1 In den Skigebieten A, B und C verbringen jährlich immer die gleichen 200 000 Gäste ihren Skiurlaub. Die Übergangstabelle bzw. die Übergangsmatrix M legen modellhaft die Veränderung der Gästeverteilung auf die drei Skigebiete von einem zum nächsten Jahr fest.

| zu \ von | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 0,9 | 0,15 | 0,2 |
| B | 0,06 | 0,8 | 0,2 |
| C | 0,04 | 0,05 | 0,6 |

; $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

1.1 Geben Sie ein Übergangsdiagramm an und interpretieren Sie den Wert 0,04 in M.

(4 Punkte)

1.2 In A verbringen 60%, in B 30% und in C 10% der Gäste ihren Skiurlaub.
Ermitteln Sie für das folgende Jahr die jeweilige Anzahl der Gäste.
Bestimmen Sie das Skigebiet, in dem der größte prozentuale Unterschied entsteht.

(4 Punkte)

1.3 In einer Simulation wird angenommen, dass im Jahr 2020 die Anzahl der Gäste in A mit der Summe der Anzahl der Gäste in B und C übereinstimmt.
Man geht zudem davon aus, dass im Jahr 2021 in B genau 63500 Gäste ihren Skiurlaub verbringen werden.
Bestimmen Sie die Anzahl der Gäste von Skigebiet A, B und C im Jahr 2020.

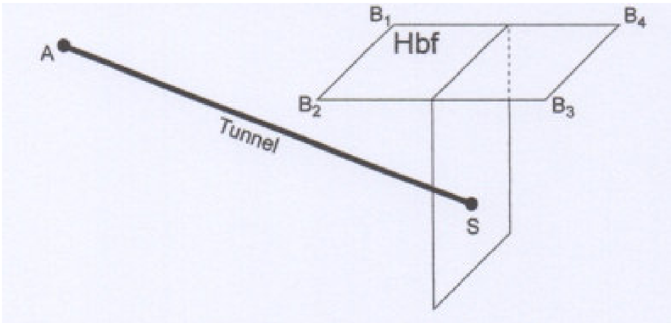
(4 Punkte)

1.4 Berechnen Sie die prozentuale Gästeverteilung, die von Jahr zu Jahr gleich bleibt.

(3 Punkte)

## Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1 Die Grundfläche eines Hauptbahnhofs (Hbf) wird durch ein Viereck mit den Eckpunkten $B_1(0|1|0)$ , $B_2(3|0|0)$, $B_3(5|6|0)$ und $B_4(2|7|0)$ modelliert.
Ein Tunnel startet im Punkt A(0|-11|0) und endet im Punkt S(2,5|3,5|-0,5).
Eine Längeneinheit entspricht 100 Meter (m). Die Modellierung ist in der folgenden (nicht maßstabsgetreuen) Skizzen veranschaulicht.




1.1 Zeigen Sie, dass die Grundfläche des Hbf ein Rechteck ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche in Quadratkilometer.

(4 Punkte)

1.2 Der Tunnel von A nach S wird modelliert durch die Strecke g mit

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \ ; \ 0 \le r \le 1 \ .$$

1.2.1 Der Tunnel schließt mit der Ebene, in der die Grundfläche des Hbf liegt, einen Winkel ein. Berechnen Sie diesen Winkel.

(2 Punkte)

1.2.2 Untersuchen Sie, ob für jeden Punkt des Tunnels der Sicherheitsabstand von mindestens 20 Meter zur Seite $\overline{B_1B_2}$ der Grundfläche des Hbf eingehalten wird.

(4 Punkte)

1.3 Eine Ebene E besitzt die Darstellung E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 13$ .

1.3.1 Prüfen Sie, ob der Punkt S in der Ebene E liegt. (1 Punkt)

1.3.2 Geben Sie eine Gleichung der Geraden k durch A an, die orthogonal zu E ist.

Zur Planung eines weiteren Tunnels möchte man wissen, wo sich der Punkt A‘ $(\neq A)$ auf k befindet, der denselben Abstand zu E hat wie der Punkt A.
Bestimmen Sie die Koordinaten von A‘.

(4 Punkte)