Aufgabe 1:

1.1 (6 Punkte)

Gegeben ist folgende Wertetabelle einer Polynomfunktion f, ihrer ersten Ableitungsfunktion f' und ihrer zweiten Ableitungsfunktion f''.
Das Schaubild von f ist K_f.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	30	22	2	-24	-50	-70	-78
f′(x)	0	-15	-24	-27	-24	-15	0
f″(x)	-18	-12	-6	0	6	12	18

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse, eines Hoch- und eines Tiefpunktes von K_f an.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt P(-1/f(-1)).

1.2 (5 Punkte)

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -\frac{1}{24}x^2(x-5)(x+3)$; $x \in \mathbb{R}$.
Geben Sie Art und Lage der Nullstellen an und skizzieren Sie davon ausgehend das Schaubild von g.

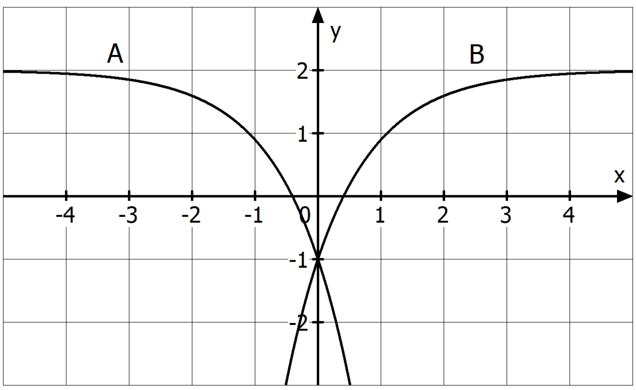
1.3 (4 Punkte)

Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} - 3e^x = 0$.

1.4 (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit
$h(x) = a \cdot e^{-x} + b$, $x \in \mathbb{R}$; $a,b \neq 0$

Begründen Sie, welches der Schaubilder A bzw. B zur Funktion h gehört.
Bestimmen Sie a und b.



1.5 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx$.

1.6 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +3z & = & 4 \\ -x & & -6z & = & -8 \\ x & +4y & & = & 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie x und y, wenn z = -4 ist.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

2.1 (9 Punkte)
Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f mit der x-Achse und der Extrempunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f für $-1 \le x \le 3{,}5$.

2.2 (5 Punkte)
Berechnen Sie $\int_0^3 -f(x)dx$.
Markieren Sie die Fläche, deren Inhalt mit diesem Ausdruck berechnet wird, in Ihrem Schaubild aus Aufgabe 2.1.

2.3 (6 Punkte)
Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen falsch oder wahr sind:
a) Jede Polynomfunktion vierten Grades besitzt eine Nullstelle.
b) Jede Nullstelle einer Funktion ist Extremstelle ihrer Stammfunktion.
c) Das Schaubild jeder Polynomfunktion dritten Grades besitzt sowohl einen Hoch- als auch einen Tiefpunkt.

Die Einwohnerzahl eines Landes wächst entsprechend der Funktion g mit $g(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$.
Dabei ist t die Zeit in Jahren, t = 0 ist das Jahr 2016 und g(t) gibt die Einwohnerzahl. des Landes in Millionen zum Zeitpunkt t an.
Im Jahr 2016 lebten 120 Millionen Menschen in dem Land, im Jahr 2018 sind es 126 Millionen Menschen.

2.4 (3 Punkte)
Bestimmen Sie die Werte für a und b.

Im Folgenden sei a = 120 und b = 0,025.

2.5 (4 Punkte)
Bestimmen sie die Bevölkerungszahl im Jahr 2033.
In welchem Jahr war unter diesen Vorgaben die Bevölkerungszahl halb so groß wie im Jahr 2016?

2.6 (3 Punkte)
Bestimmen Sie, um wieviel Prozent die Einwohnerzahl jährlich zunimmt.

Gegeben sind die Funktionen f und g mit
$f(x) = -2e^{-0,5x} + 3$; $g(x) = -2\sin(0,5x) + 3$; $x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild von f ist K_f , das Schaubild von g ist K_g .

3.1 (9 Punkte)
Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_f .
Zeigen Sie, dass K_f keine Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt.
Zeichnen Sie K_f für $-2 \le x \le 6$.

3.2 (6 Punkte)
Begründen Sie, dass K_f und K_g unendlich viele Schnittpunkte haben.
Das Schaubild K_f wird so verschoben, dass es keine gemeinsamen Punkte mit K_g hat.
Geben Sie einen passenden Funktionsterm an.

Kann K_f so verschoben werden, dass es K_g in einem Tiefpunkt berührt?

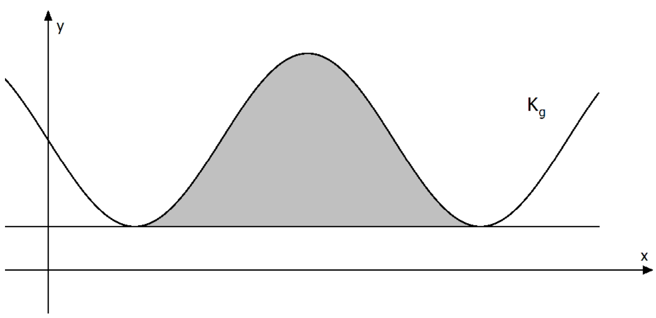
3.3 (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Punkt $W(2\pi / 3)$ Wendepunkt von K_g ist.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in W.

3.4 (8 Punkte)
Johanna soll den Inhalt in der Zeichnung schraffierten Fläche berechnen.
Nur einen der Ansätze a) bis c) liefert das richtige Ergebnis.
Nennen Sie je ein Argument, warum die anderen beiden Ansätze falsch sind.

a) $\int_{\pi}^{5\pi} (-2\sin(0,5x) + 3)dx$

b) $\int_{\pi}^{5\pi} (-2\sin(0,5x) + 2)dx$

c) $\int_{\pi}^{3\pi} (-2\sin(0,5x) + 3 - 1)dx$



Berechnen Sie den gesuchten Flächeninhalt.

4.1 (8 Punkte)
Gegeben ist das Schaubild K_h einer trigonometrischen Funktion h.

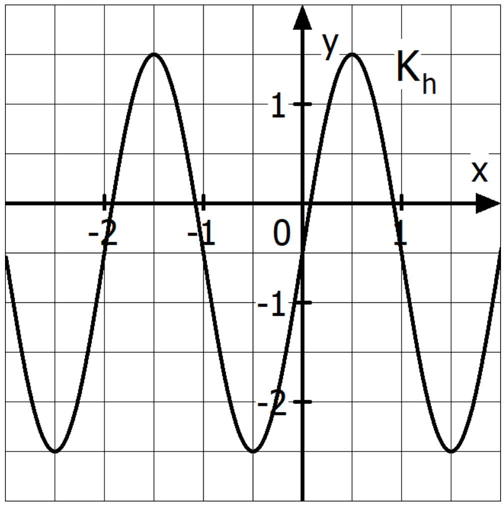
Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $h(-2{,}25) < 0$

b) $h'(-2{,}25) < 0$

c) $h''(-2{,}25) < 0$

d) $\int_{-2{,}25}^{0} h(x)\,dx < 0$



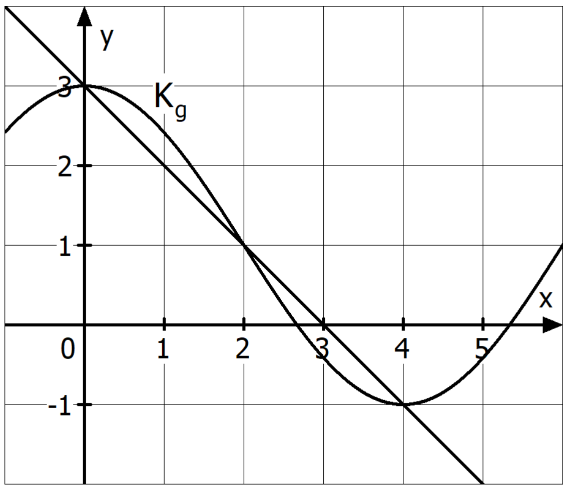
4.2 (6 Punkte)

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer trigonometrischen Funktion g mit dem Hochpunkt H(0/3) und dem Tiefpunkt T(4/-1). Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von g an.

Die Gerade mit der Gleichung $y = -x + 3$ verläuft durch die Punkte H und T.

Begründen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\int_0^4 (g(x) - (-x+3))\,dx = 0$$



Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K.

4.3 (13 Punkte)
Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.
Berechnen sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f und der x-Achse.
Zeichnen Sie K_f für $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f .

4.4 (3 Punkte)
Ermitteln Sie die Gleichung der Stammfunktion von f, deren Schaubild durch den Punkt P(1/1) geht.