Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot \cos(x^2 + 1)$.

(2 VP)

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

(2 VP)

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $(x^2 - 2) \cdot (e^x + 1) = 0$.

(2 VP)

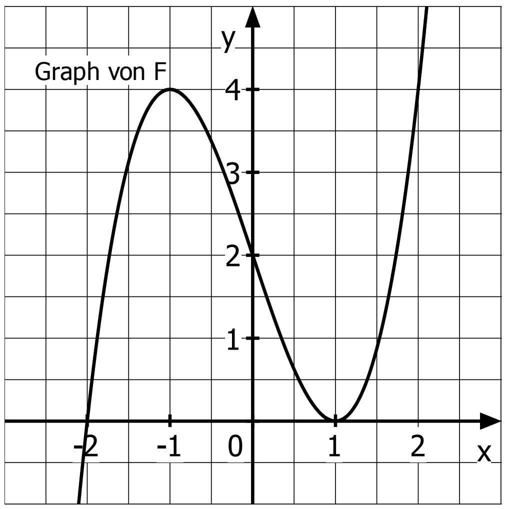
Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f .
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) f' besitzt im Bereich $-1 \le x \le 1$ eine Nullstelle.

(3) $f\big(F(-2)\big) > 0$



(4 VP)

Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

(3 VP)

Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

b) Berechnen Sie den Abstand von g und E.

c) Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an E.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

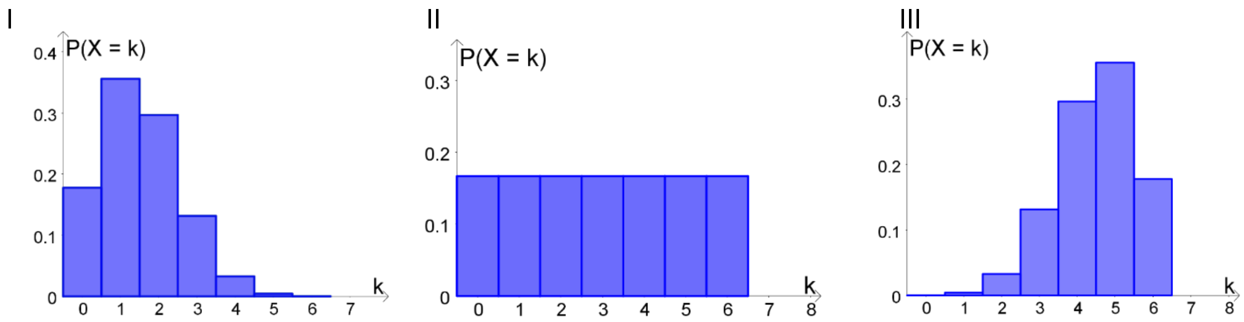
(4,5 VP)

Aufgabe 7

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen X dar:



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist.
Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 2e^{-x}$. Ihr Graph ist K.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.
Untersuchen Sie f rechnerisch auf Monotonie.
Skizzieren Sie K.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, unter dem K die x-Achse schneidet.

(6 VP)

b) Die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen eine nach rechts offene Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt.

(3 VP)

c) Der Graph K* entsteht durch Spiegelung von K an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der zu K* gehörenden Funktion f*.

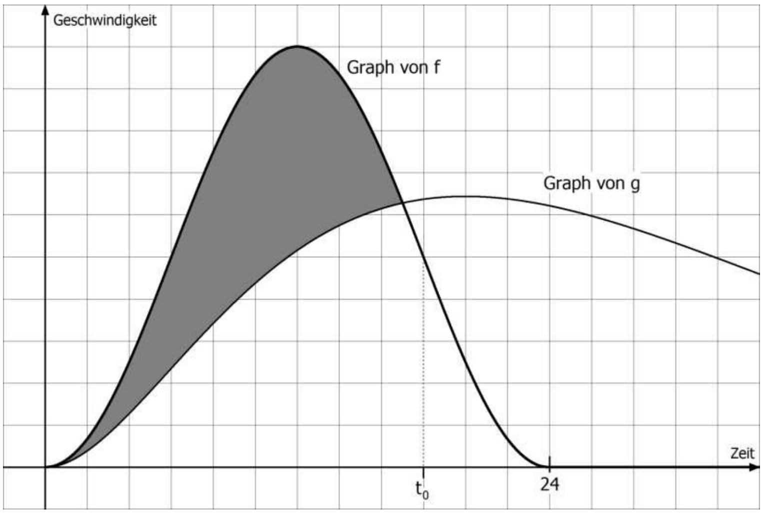
(2 VP)

d) Eine Parabel zweiter Ordnung berührt den Graphen K im Punkt $S(0\,|\,4)$ und hat ihren Scheitel auf der Geraden mit der Gleichung $y = 5$.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel.

(4 VP)

Aufgabe A 1.2

Die Funktionen f und g beschreiben die Geschwindigkeiten zweier Fahrzeuge F und G in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, f(t) und g(t) in Meter pro Sekunde). Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt. Die beiden Fahrzeuge starten zum Zeitpunkt $t=0$ nebeneinander und fahren in dieselbe Richtung.



a) Beschreiben Sie die Bewegung von Fahrzeug F in den ersten 24 Sekunden nach dem Start.
Die Stelle t_0 ist eine Wendestelle des Graphen von f.
Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang.

(2 VP)

b) Deuten Sie den Inhalt der markierten Fläche im Sachzusammenhang.
Gegeben ist die Gleichung $\int_0^x g(t)dt = \int_0^{24} f(t)dt$.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

(3 VP)

Aufgabe A 2.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \le t \le 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an.
Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

$$\text{I} \quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100, \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\text{II} \quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100, \quad b \in \mathbb{R}$$

(5 VP)

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(3,5 VP)

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \le t \le 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

(4,5 VP)

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(4,5 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes $c > 0$ ist eine Funktion h_c mit $h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ gegeben.

Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet.
Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an.
Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leq x \leq u$ mit der x-Achse einschließt.

(2,5 VP)

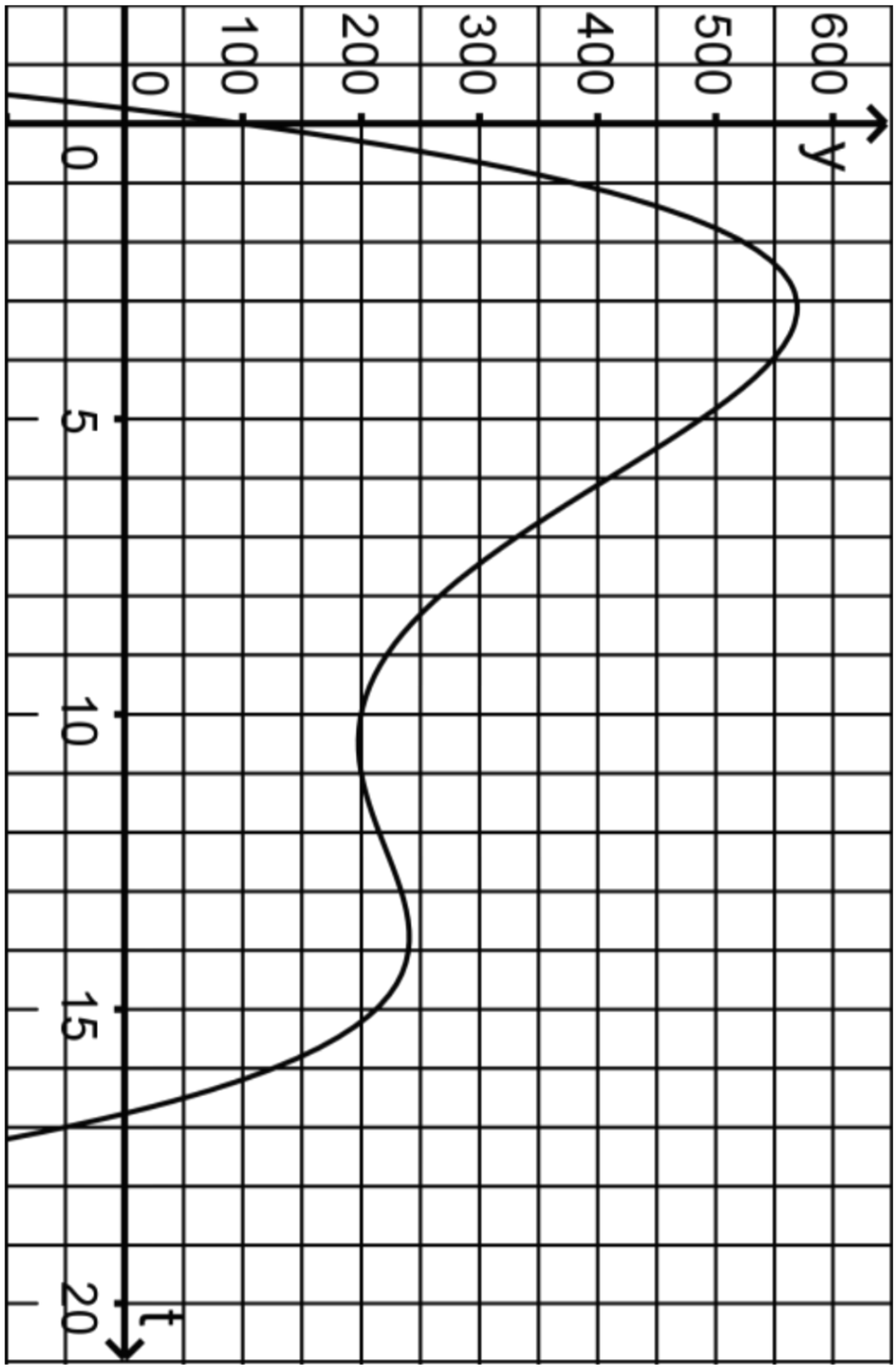
Zu- und Vorname: ____________________

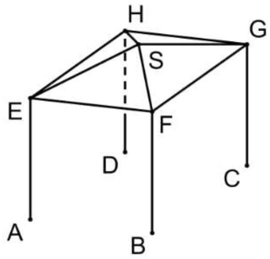
Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: ____________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

<u>Abbildung zu Aufgabe A 2.1</u>





Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden. In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten modellhaft durch die Punkte $A(2\,|\,-3\,|\,-0{,}5)$, B, C und $D(-3\,|\,-2\,|\,-0{,}5)$ sowie $E(2\,|\,-3\,|\,4)$, $F(3\,|\,2\,|\,4)$, $G(-2\,|\,3\,|\,4)$ und $H(-3\,|\,-2\,|\,4)$ dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0\,|\,0\,|\,5)$. Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.
Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(4 VP)

b) An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird.
Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

(2 VP)

c) Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte.
Berechnen Sie das Verhältnis der Längen dieser beiden Abschnitte.

(2,5 VP)

d) Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch die Strecke AE dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch die Strecke BF dargestellt wird.
Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

(1,5 VP)

Gegeben sind die Punkte $A(6\,|\,1\,|\,0)$, $B(4\,|\,5\,|\,-4)$ und $C(-2\,|\,8\,|\,2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.
Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten von D.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks 54 FE beträgt.
(Teilergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$)

(5 VP)

b) Es gibt Pyramiden mit der Grundfläche ABCD, die das Volumen 108 VE haben.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze einer solchen Pyramide.

(2,5 VP)

c) Ein Teil der Fläche des Rechtecks ABCD befindet sich unterhalb der x_1x_2-Ebene.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Teilfläche.

(2,5 VP)

Die Firmen A und B stellen Lampen her und liefern diese anschließend an Händler aus. Der Anteil defekter Lampen unter ausgelieferten Lampen der Firma A beträgt im Mittel 9 %, unter ausgelieferten Lampen der Firma B im Mittel 7 %. Im Folgenden soll sowohl für die Lampen der Firma A als auch für die Lampen der Firma B angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

a) Betrachtet werden Lampen, die von der Firma A ausgeliefert wurden.
Zehn Lampen werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens sechs Lampen nicht defekt sind.
500 Lampen werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweicht.

(3 VP)

b) Einem Händler werden Lampen geliefert, die in Kartons verpackt sind; jeder Karton enthält 30 Lampen. Der Händler wählt aus jedem Karton zwei Lampen zufällig aus und prüft diese. Sind bei einem Karton die beiden ausgewählten Lampen nicht defekt, so nimmt er diesen Karton an, ansonsten nicht.
Ein Karton enthält sechs defekte Lampen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt.
Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50 % beträgt.

(3,5 VP)

c) Ein Discounter bezieht 35 % der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65 % von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft: Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt.
Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters.

(3,5 VP)

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

1-Personen-Haushalte	40,5 %
2-Personen-Haushalte	34,5 %
3-Personen-Haushalte	12,5 %
4-Personen-Haushalte	9,2 %
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3 %

a) Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt."
B: „Mindestens die Hälfte der ausgewählten Haushalte waren Mehrpersonenhaushalte."
C: „Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt und unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte."

(3,5 VP)

b) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind.

(2 VP)

c) Im Jahr 2013 lebten in Deutschland insgesamt etwa 80 Millionen Menschen. Bestimmen Sie für das Jahr 2013 einen Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(2 VP)

d) Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % die Nullhypothese

H_0: „Der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte beträgt höchstens 40,5 %."

getestet werden.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 VP)