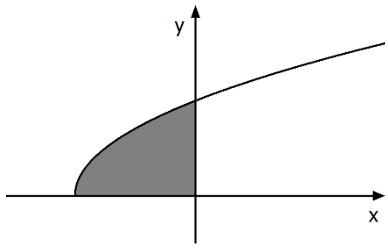
Aufgabe 1

Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit $f(x)=\sqrt{4x+16}$.
Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



(2,5 VP)

Aufgabe 2

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t)=3t^2-60t+500$ mit $t\in\mathbb{R}$, $0\le t\le 10$, beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung.

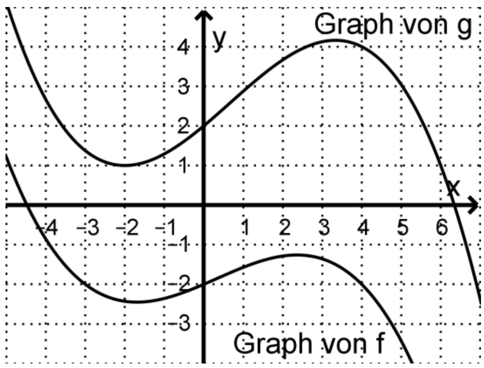
b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde –30 beträgt.

(2,5 VP)

Aufgabe 3

Die Abbildung zeigt die Graphen der ganzrationalen Funktionen f und g. Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x)=g(f(x))$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(4\,|\,h(4))$.



(2,5 VP)

Aufgabe 4

Gegeben sind die Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\3\end{pmatrix}$ $(r,s\in\mathbb{R})$.

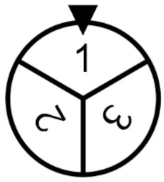
a) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an.
Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.

b) Die Ebene E enthält die Geraden g und h.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(2,5 VP)

Aufgabe 5

Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a) Die Zufallsgröße X gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an.
Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte.

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		

b) Betrachtet werden die Ereignisse A und B:
A: „Es wird (1;3), (2;2) oder (3;1) erzielt."
B: „Beim ersten Drehen wird eine 2 erzielt."
Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

(2,5 VP)

Aufgabe 6

Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

a) Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschieden Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term $\binom{3}{2}\cdot 14$ berechnet werden. Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang.

b) In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \le t \le 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an.
Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

I $\quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100, \qquad a \in \mathbb{R}$

II $\quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100, \quad b \in \mathbb{R}$

(5 VP)

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(3,5 VP)

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \le t \le 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

(4,5 VP)

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(4,5 VP)

Aufgabe A 1.2

Zeigen Sie: Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion f die x-Achse in einem Punkt P berührt, dann gilt dies auch für den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{f(x)} - 1$.

(2,5 VP)

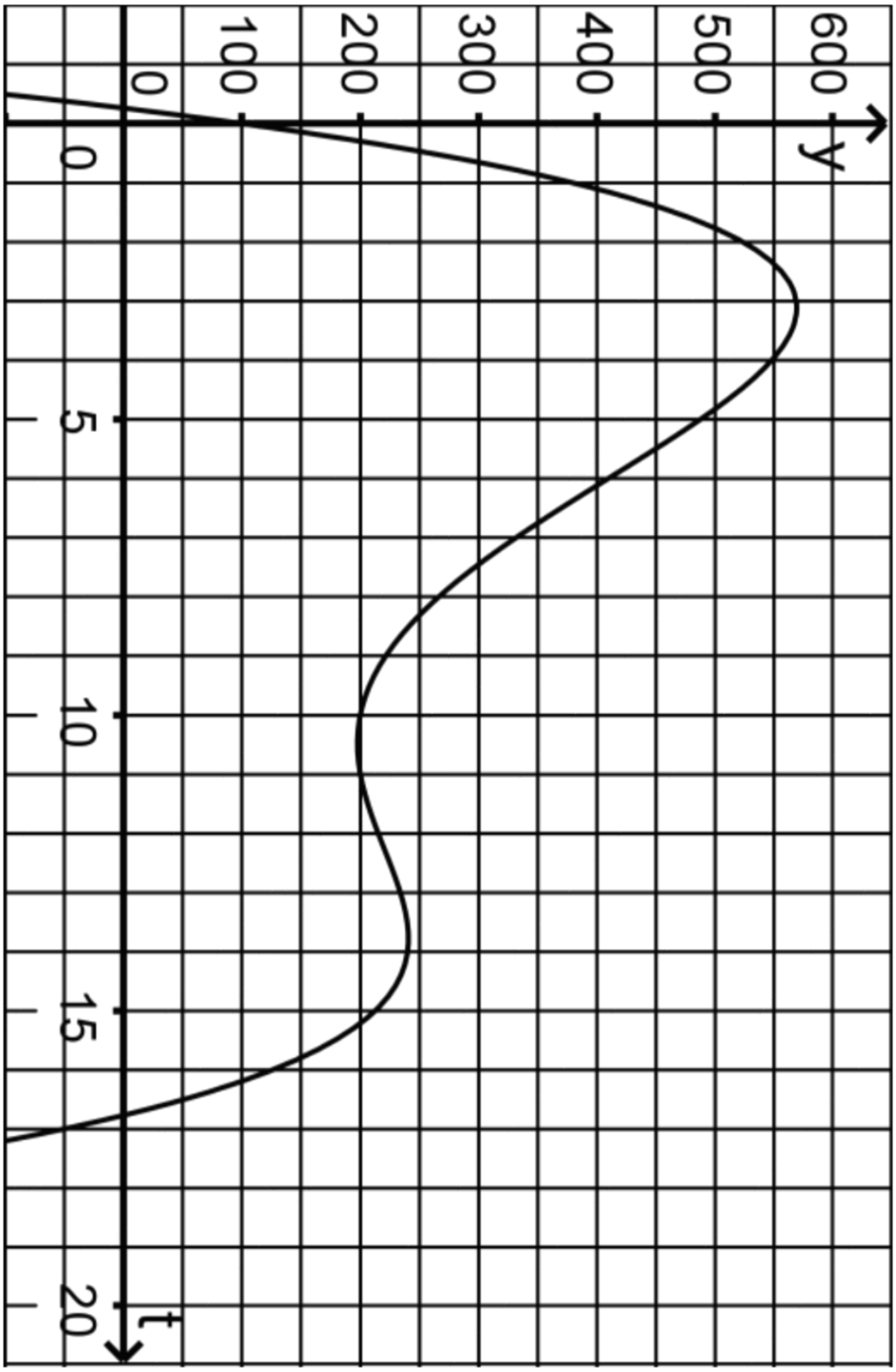
Zu- und Vorname: ______________________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: ______________________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe A 1.1



Gegeben sind der Punkt $R(4\,|\,-2\,|\,4)$ und die Ebenenschar $E_k:\ kx_1 + kx_2 + x_3 = 14\ (k \in \mathbb{R})$.

a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem.
Bestimmen Sie diejenige Ebene der Schar, die den Punkt R enthält.
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E_5 und E_0.
Zeigen Sie, dass es eine Gerade g gibt, die in allen Ebenen der Schar liegt.
Bestimmen Sie die Ebenen der Schar, von denen der Punkt R den Abstand 2 hat.

(7 VP)

b) Gegeben sind die Spurpunkte $S_1(7\,|\,0\,|\,0)$, $S_2(0\,|\,7\,|\,0)$, $S_3(0\,|\,0\,|\,14)$ einer Ebene E.
Begründen Sie, dass die Ebene E eine Ebene der Schar ist.
Betrachtet wird ein gerader Kegel mit der Spitze S_3, dessen Grundkreis in der x_1x_2-Ebene liegt. Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf dem Grundkreis.
Untersuchen Sie, ob der Punkt R innerhalb des Kegels liegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, die den Kegel in der Strecke S_1S_3 berührt.

(5,5 VP)

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %. Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

a) Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.
Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
  A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv."
  B: „Das Testergebnis ist negativ."
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.

(4,5 VP)

b) Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 20000 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt. Berechnen Sie in einem geeigneten Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von X abweicht. (2 VP)

Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem ein Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen kleiner als 15 mg, so ist dieser unbrauchbar.
Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

c) Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können.
Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll sich durch diese Änderung jedoch nicht erhöhen.
Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss.

(4 VP)

d) Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt. Vor einer Verbesserung des Herstellungsverfahrens hatte der Erwartungswert 20 mg und die Standardabweichung 4,0 mg betragen. Durch die Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert.
Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung (auf eine Dezimale gerundet).

(2 VP)

Aufgabe 1 (IQB 2015)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\ln\left(e^2-x\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D.

a) Geben Sie D an.

b) Bestimmen Sie die Nullstelle von f.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $y=-\frac{1}{e^2}\cdot x+2$ eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\left(0\,|\,f(0)\right)$ ist.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=2\cdot\sqrt{4-x}$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge von f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P\left(3\,|\,f(3)\right)$ schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche A ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

c) Der Graph der Funktion f schließt mit den Koordinatenachsen ebenfalls eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Anteil dieser Fläche an der Fläche A.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=2\cdot\ln(x+3)$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge von f.

b) Begründen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

c) Geben Sie Definitionsmenge und Wertemenge von $\bar{f}$ an.

Aufgabe 4

Die Funktion f mit $f(x)=(x-1)^3+1,\ x\in\mathbb{R}$, ist umkehrbar. Der Graph von f wird mit G_f, der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ mit $G_{\bar{f}}$ bezeichnet. G_f und $G_{\bar{f}}$ schneiden sich in den Punkten $S_1(0\,|\,0)$, $S_2(1\,|\,1)$ und $S_3(2\,|\,2)$.

a) Beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x)=x^3$ hervorgeht.

b) Bestimmen Sie ohne Bestimmung eines Terms von $\bar{f}$ den Inhalt der Fläche, die G_f und $G_{\bar{f}}$ im Bereich $0\le x\le 1$ einschließen.

c) Ermitteln Sie ohne Bestimmung eines Terms von $\bar{f}$ die Größe des Winkels, unter dem sich G_f und $G_{\bar{f}}$ im Punkt S_2 schneiden.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{4+3x}$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle, Definitions- und Wertemenge von f.
Zeigen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist.

b) Der Graph von f schneidet die erste Winkelhalbierende in einem Punkt P.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten.
Die Tangente t an den Graphen von f im Punkt P hat die Gleichung $y=\frac{3}{8}x+\frac{5}{2}$.
Ermitteln Sie ohne Verwendung eines Terms der Umkehrfunktion $\bar{f}$ eine Gleichung der Tangente an den Graphen von $\bar{f}$ im Punkt P.

c) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$ und geben deren Definitions- und Wertemenge an.

d) Die Graphen von f und $\bar{f}$ schließen mit der x-Achse eine Fläche ein.
Skizzieren Sie diese Fläche und berechnen Sie deren Inhalt .

Aufgabe 6 (Auszug aus IQB 2018)

In einem Behälter befinden sich insgesamt 380 Geldscheine. Deren Verteilung kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

Wert des Scheins	5 €	10 €	20 €	50 €
Anzahl	44	60	72	204

Sechs dieser Geldscheine sind nicht mehr umlauffähig, darunter zwei mit einem Wert von jeweils 50 €.

a) Aus dem Behälter wird ein Geldschein zufällig entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Schein einen Wert unter 50 € hat und umlauffähig ist.

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{374}{5}}{\binom{380}{7}}$ berechnet werden kann.
Geben Sie dieses Ereignis an.

Aufgabe 7

Die Abbildung zeigt die Vierfeldertafel zu zwei stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

	B	$\overline{B}$	
A	0,18		
$\overline{A}$	0,12		
			1

Aufgabe 8

Die Abbildung zeigt die Vierfeldertafel zu zwei stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Es ist $P(A) > P(B)$. Bestimmen Sie $P(A)$.

	B	$\overline{B}$	
A	0,18		
$\overline{A}$		0,28	
			1

Aufgabe 9 (IQB 2015)

Die Flächen zweier Würfel sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet:

Würfel 1: B, B, C, C, C, C
Würfel 2: A, A, A, B, B, C

a) Würfel 1 wird zweimal geworfen. Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben B gewürfelt wird. Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße.

b) Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben C gewürfelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde.

Aufgabe 10 (IQB 2020)

An einem Fest nehmen Erwachsene und Jugendliche teil, einige der Gäste sind verkleidet. Unter allen Gästen beträgt der Anteil der verkleideten Erwachsenen 12 %, der Anteil aller Erwachsenen 60 %. Von den Jugendlichen sind 75 % verkleidet.

a) Bestimmen Sie den Anteil derjenigen, die nicht verkleidet sind, unter allen Gästen.

b) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{0{,}12}{0{,}12+0{,}75\cdot 0{,}4}$ im Sachzusammenhang.

Aufgabe 11 (Auszug aus IQB 2018)

Bei fehlerhaften Flachbildschirmen treten Fehler am häufigsten in Form eines defekten Displays sowie in Form eines defekten Netzteils auf. Für einen zufällig ausgewählten Bildschirm beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- das Display defekt ist, 10,7 %,
- weder das Display noch das Netzteil defekt ist, 87,3 %,
- entweder das Display oder das Netzteil defekt ist, 11,7 %.

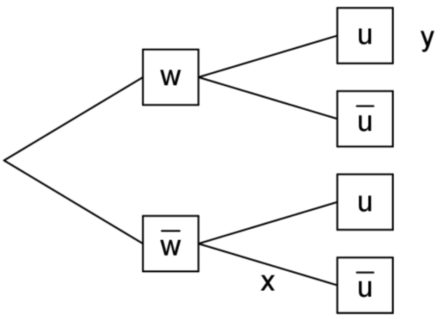
a) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

b) Untersuchen Sie, ob die beiden betrachteten Defekte unabhängig voneinander auftreten.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Bildschirm mit nicht defektem Netzteil das Display defekt ist.

Aufgabe 12 (Auszug aus IQB 2020)

In einem großen Unternehmen sind 29 % der Beschäftigten weiblich. Unter allen Beschäftigten wurde eine Befragung zur Zufriedenheit am Arbeitsplatz durchgeführt. Dabei ergab sich, dass 3,5 % der weiblichen und 10,5 % der anderen Beschäftigten unzufrieden sind.
Unter allen Beschäftigten wird eine Person zufällig ausgewählt. Das abgebildete Baumdiagramm stellt den Sachverhalt dar.



a) Ermitteln Sie die Werte von x und y.

b) Die ausgewählte Person ist an ihrem Arbeitsplatz unzufrieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie nicht weiblich ist.

c) Für eine Abteilung des Unternehmens ergab die Befragung, dass 4 % der weiblichen und 10 % der anderen Beschäftigten an ihrem jeweiligen Arbeitsplatz unzufrieden sind. Unter allen Beschäftigten dieser Abteilung ist der Anteil der unzufriedenen Beschäftigten, die nicht weiblich sind, fünfmal so groß wie der Anteil der unzufriedenen weiblichen Beschäftigten. Bestimmen Sie für diese Abteilung den Anteil der weiblichen Beschäftigten.